Tebranma harakat qonunlari

Reja:

1. *Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakaati.*
2. *Ekvivalent bikrliklar.*
3. *Moddiy nuqtaning so‘nuvchi tebranma harakati*
4. *Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati. Rezonans.*
5. *Muhit qarshilik kuchi ta’siridagi tebranma harakat.*

**Moddiy nuqtaning tebranma harakati**

Qishloq xo‘jaligi mashinalarining keng miqyosda ishlatilishi,shuningdek turli transport hamda suv inshootlarining barpo bo‘lishi ularning qismlarida hosil bo‘ladigan tebranishlarni chuqur o‘rganishni talab qiladi.

 Mashina va inshoot qismlarining tebranma harakatlarini o‘rganish ko‘p hollarda moddiy nuqta tebranma harakatini o‘rganishga keltiriladi.

 Moddiy nuqtaning tebranma harakati deb shunday harakatga aytiladiki,bunda nuqta muvozanat holatidan goh bir tomonga,goh ikkinchi tomonga navbatma-navbat chetlanadi.Demak, tebranma harakat takrorlanuvchi harakatdir.

 Tebranma harakatlar asosan uch turga bo‘linadi.

1. Erkin (garmonik) tebranma harakat.

2. So‘nuvchi tebranma harakat.

3. Majburiy tebranma harakat.

**Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati**

Faraz qilaylik,moddiy nuqtaga hamma vaqt uning muvozanat holati tomon yo‘nalgan kuch ta’sir qilsin va mazkur nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsin (131-rasm).

Moddiy nuqta koordinatasining



 13.1-rasm

funksiyasi sifatida o‘zgaruvchi va muvozanat holatiga qarab yo‘nalgan kuch qaytaruvchi kuch deb ataladi. Qaytaruvchi kuch nuqtaning holatiga bog‘liq bo‘ladi,ya’ni:

F=-cx (13.1)

bunda c - moddiy nuqtani uzunlik birligiga ko‘chirish uchun zarur bo‘lgan kuch bo‘lib,bikirlik koeffitsienti deyiladi, o‘lchov birligi esa . x – nuqtaning absissasi.

Boshlang‘ich paytda M nuqtaning absissasi , tezligi V0 bo‘lsin.

M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz**:**

(13.2)
bu ifodada belgilash kiritsak,u quyidagicha yoziladi:  ( 13.3)

  (13.4)

(13.4) ning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

 (13.5)

(13.5) dagi C1 va C2 o‘zgarmaslar boshlang‘ich shartlardan foydalanib aniqlanadi:

  (13.6)

Shunday qilib, M nuqtaning harakati

  (13.7)

tenglama bilan aniqlanadi.

 Moddiy nuqta tebranma harakatini umumiy holda tekshirish qulay bo‘lishi uchun  o‘rniga a va  o‘zgarmaslarni quyidagicha tanlaymiz:

  (68.8)

 (13.8) ni (13.5) ga qo‘yib, M nuqta harakatini aniqlovchi tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

  (68.9)

(13.8) ifodalarni avval kvadratga ko‘tarib qo‘shsak,so‘ng (13.8) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo‘lsak va (13.6) ni e’tiborga olsak,

  (13.10)

kelib chiqadi.

(13.9) dan ko‘ramizki, moddiy nuqtaning qaytaruvchi kuch ta’siridagi harakati davriy xarakterga ega bo‘lgan erkin tebranma harakatdan iborat ekan.Shuning uchun (13.4) erkin tebranma harakatning differensial tenglamasi deyiladi. (13.9) tenglama moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat qonunini ifodalaydi.

(13.9) tenglamadagi a – nuqtaning muvozanat holatidan eng katta og‘ishi – tebranish amplitudasi, kt+- tebranish fazasi, - boshlang‘ich faza, k – tebranishning doiraviy takrorligi deyiladi.

Erkin tebranma harakat grafigi 13.2-rasmda ko‘rsatilgan.  davr oralig‘ida tebranish fazasi

 ga o‘zgarishini hisobga olsak, (13.9) dan quyidagi tenglamani yozish mumkin



 Bundan erkin tebranma harakat davrini aniqlovchi

*132-расм*

  (13.11)

formulani hosil qilamiz.

Tebranish davrining teskari qiymati tebranish takrorligi deyiladi; uni bilan belgilasak,ta’rifga ko‘ra :

 

(13.10), (13.11) dan ko‘ramizki,tebranish amplitudasi va boshlang‘ich faza harakatning boshlang‘ich shartlariga bog‘liq,tebranish davri, shuningdek, tebranish takrorligi nuqtaning boshlang‘ich holatiga bog‘liq emas ekan. Binobarin,tebranish davri tebranma harakatdagi nuqtaning o‘zgarmaydigan xarakteristikasidir.Tebranish davrini topish uchun tebranma harakatning differensial tenglamasini (13.4) ko‘rinishda tuzish va k ni topish kifoya.

**Moddiy nuqtaning so‘nuvchi tebranma harakati**

Massasi m bo‘lgan M moddiy nuqta qaytaruvchi kuch va muhitning qarshilik kuchi ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsin (13.3-rasm).

Muhitning qarshilik kuchini moddiy nuqta tezligining birinchi darajasiga proporsional deylik:

 

Bu harakatni tekshirish uchun moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

 13.3-rasm

  (13.12)

(13.12) ni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

 =0 (13.13)

(13.13) ning ikki tomonini m ga bo‘lib,  deb belgilaymiz. Natijada

  (13.14)

 kelib chiqadi.

Boshlang‘ich paytda M nuqta M0 da bo‘lib, uning absissasi x0 , tezligi  bo‘lsin. (13.14) ning yechimini topish uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:



Bu tenglama yechimi



ko‘rinishda bo‘lib, undagi b va k ga nisbatan quyidagi hollar uchrashi mumkin:

1) k > b qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan kichik bo‘lgan hol;

2) k < b qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan katta bo‘lgan hol;

3) k = b –chegara hol.

Bu hollarni alohida-alohida tekshiramiz.

1).k > b bo‘lganda xarakteristik tenglama ildizlari kompleks sondan iborat,ya’ni:

 

yoki

 

bunda 

Bu holda (69.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

  (13.15)

(13.15) dagi C1 , C2 o‘zgarmaslarni (13.8) ko‘rinishda tanlab olsak, (13.15) quyidagicha yoziladi:

  (13.16)

(13.16) dagi a ifoda vaqt o‘tishi bilan nolga intiladi,ya’ni harakat asta-sekin so‘na boradi. Shuning uchun muhitning qarshilik kuchi va qaytaruvchi kuch ta’siridagi nuqtaning harakati kichik qarshiliklar holda so‘nuvchi tebranma harakat bo‘ladi.

 (13.14) so‘nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasini (13.15) yoki (13.16) so‘nuvchi tebranma harakat qonunini ifodalaydi.



 13.4-rasm

So‘nuvchi tebranishning grafigi (13.16) tenglamaga asosan, tenglamalari  bo‘lgan ikki egri chiziq orasida bo‘lib,bu egri chiziqlarga urinib o‘tadi (13.4-rasm).

(13.16) dagi a va  o‘zgarmaslarni harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalanib topamiz.

(13.16) dan hosila olamiz:

 (13.17)

(13.16) va (13.16) ga boshlang‘ich shartlarni qo‘ysak:



yoki

  (13.16)

kelib chiqadi.

(13.16) tenglamalar sistemasini yechsak:

  (13.17)

hosil bo‘ladi.

(13.14) tenglamada  qatnashgani tufayli nuqta harakati davriy xarakterga ega, lekin  nuqtaning to‘liq avvalgi holatiga qayta olmasligini ko‘rsatadi. Shuning uchun so‘nuvchi tebranishning tebranish davri tushunchasini shartli kiritamiz:

  (13.18)

yoki

  (13.19)

(13.19) dagi ifodani qatorga yoyib, b/k ning ikkinchi darajadan yuqori bo‘lgan darajadagi hadlarini tashlab yuborsak va (13.11) ni e’tiborga olsak,

  (13.20)

kelib chiqadi.Bu ifodadagi b/k qarshilik koeffitsienti deb ataladi.

(13.20) dan ko‘ramizki, T >  , biroq qarshilik juda kichik bo‘lganda tebranma harakat davri erkin tebranish davridan deyarli farq qilmaydi,ya’ni 

Endi, so‘nuvchi tebranma harakat amplitudasining o‘zgarishini ko‘rib chiqamiz. M nuqta o‘zining muvozanat holatidan v - maksimal og‘ishini  , v+1 - maksimal og‘ishini  bilan belgilaymiz. Bu og‘ishlarga mos kelgan vaqtlar  va  uchun (13.14) quyidagicha bo‘ladi:





bundan

  (13.21)

kelib chiqadi. (13.21) dan ko‘ramizki  nisbat o‘zgarmas hamda noldan kichik.

Demak, tebranish amplitudasining har bir T davr o‘tishdagi ketma-ket qiymatlari,maxraji  bo‘lgan kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil qiladi.  - tebranish dekrementi (so‘nish faktori) deyiladi.Tebranish dekrementidan olingan natural logarifmning moduli esa logarifmik dekrement deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

  (13.22)

bu yerda b - so‘nish koeffitsienti.

2) k < b bo‘lgan holda xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va manfiy bo‘ladi, ya’ni:



Natijada (13.11) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

  (13.23)

(13.23) dan ko‘ramizki, k < b holda nuqta harakati davriy xarakterga ega emas. Shuning uchun bu holdagi harakat aperiodik (ya’ni davriy bo‘lmagan) so‘nuvchi harakat deyiladi.

 (13.23) dagi C1, C2 o‘zgarmaslar harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

 (13.23) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

 (13.24)

(13.23) va (69.16) ga boshlang‘ich shartlarni qo‘ysak:

x0 = C1 + C2,  (13.25)

hosil bo‘ladi.

(13.25) dan:

 , (13.26)



kelib chiqadi.

 (13.26) ni (13.23) ga qo‘ysak, M nuqtaning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi aperiodik harakat tenglamasi hosil bo‘ladi:

 (13.27)

3) b = k da (13.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

  (13.28)

Demak,bu holda ham harakat aperiodik bo‘ladi.

(13.28) dan hosila olamiz:

  (13.29)

(13.28) va (69.21) ga boshlang‘ich shartlarni qo‘ysak:

 

hosil bo‘ladi.Bu tengliklardan

  

kelib chiqadi.

Demak, k = b bo‘lgan holdagi aperiodik harakat tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

  (13.30)

 Keyingi ikki holda moddiy nuqta tebranma harakat qilmay asimtotik ravishda nolga yaqinlashadi.

 135-rasm

Bunday harakatning grafigi moddiy nuqtaning boshlang‘ich holatiga hamda boshlang‘ich tezlikning moduli va yo‘nalishiga bog‘liq. 13.5-rasmda turli boshlang‘ich shartlar uchun b > k holdagi aperiodik harakat grafigi ko‘rsatilgan:

a) x0 >0 ,V0 >o; (13.5-rasm,a) .

b) x0 >0 ,V0 >o lekin, ) , ) ; (135-rasm,b)

v)  lekin, , ; (135-rasm,v)

b = k holda ham aperiodik so‘nuvchi harakat grafigi 13.5-rasmda ko‘rsatilganiga o‘xshash bo‘ladi.

**2.Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati.**

Moddiy nuqta qaytaruvchi kuch hamda vaqtning uzluksiz funksiyasi sifatida o‘zgaruvchi va uyg‘otuvchi kuch deb ataluvchi kuch ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsin (136-rasm).



Uyg‘otuvchi kuch garmonik qonun bo‘yicha o‘zgarsin ya’ni:

*13.6-расм*

  (13.2.1)

(13.2.1) da Q uyg‘otuvchi kuchning eng katta qiymati, p - doiraviy takrorligi, pt+- fazasi,  - boshlang‘ich fazasi. Uyg‘otuvchi kuch davri esa  ga teng.

Boshlang‘ich paytda M nuqta M0 da bo‘lib,uning koordinatasi xo, tezligi Vo bo‘lsin.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

   (13.2.2)

(13.2.2) ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:



 belgilashlar kiritsak,

  (13.2.3)

hosil bo‘ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasidan ma’lumki, (13.2.3) differensial tenglama yechimi quyidagicha yoziladi:

  (13.2.4)

(13.2.4) da x1 bilan

  (13.2.5)

bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi belgilangan;  esa (13.2.3) ning xususiy yechimidan iborat.

(13.2.5) differensial tenglamaning umumiy yechimi:

  (13.2.6)

ko‘rinishda ifodalanishi bizga ma’lum.

(13.2.3) o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko‘rinishda olamiz:

  (13.2.7)

(13.2.7) dagi B koeffitsientni aniqlash uchun (70.7) dan vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

  (13.2.8)

(13.2.7) va (13.2.8) ni (13.2.3) ga qo‘yamiz:



Bu ayniyatdan:

Natijada (13.2.7) tenglama quyidagicha yoziladi:

  (13.2.9)

(13.2.9) tenglama bilan aniqlanuvchi harakat moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati deyiladi.

Demak, (13.2.3) ning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

  (13.2.10)

(13.2.10) dagi a va  harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

(13.2.9) dan ko‘ramizki,majburiy tebranma harakat amplitudasi yoki nuqtaning eng katta dinamik siljishi:

  (13.2.11)

bo‘ladi.

(13.2.11) dan foydalanib, (13.2.9) ni quyidagi ko‘rinishlarda yozish mumkin:

 agar k > p bo‘lsa;

va  agar k < p bo‘lsa.

Bu munosabatlarga binoan k > p bo‘lganda majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasi bilan bir xilda bo‘ladi; k < p holda esa majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasidan  ga orqada qoladi.

Majburiy tebranish amplitudasi bilan p/k nisbat orasidagi bog‘lanishni tekshiraylik. Buning uchun (13.2.11) ni quyidagicha yozamiz:

  (13.2.12)

bunda  bilan moddiy nuqtaning uyg‘otuvchi kuch maksimal qiymati  ta’sirida olgan statik siljishi belgilangan.

(13.2.11) dan ko‘ramizki, majburiy tebranish amplitudasi uyg‘otuvchi kuch hamda erkin tebranish doiraviy takrorliklariga bog‘liq.

Moddiy nuqta dinamik siljishining statik siljishiga nisbati dinamik koeffitsient deyiladi.

Uni  bilan belgilaymiz:

  (13.2.13)

Dinamik koeffitsient  bilan  orasidagi (13.2.13) bog‘lanish grafigi 13.7-rasmda tasvirlangan.

 13.7-rasm

Boshlang‘ich shartlar ,  bo‘lgan holdagi harakatni tekshirish uchun (13.2.3) differensial tenglamaning umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

  (13.2.14)

(13.2.14) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

  (13.2.15)

Moddiy nuqta harakatining boshlang‘ich shartlarini (13.2.14) va (13.2.15) ga qo‘ysak:

  (13.2.16)

hosil bo‘ladi.

(13.2.16) dan

 

kelib chiqadi. Demak, (13.2.14) quyidagicha yoziladi:

  (13.2.17)

(13.2.16) dan ko‘ramizki,  hamda  bo‘lganda tebranish o‘ziga xos ko‘rinishga ega bo‘ladi.Bu hol “tepish” holi deyiladi.

“Tepish” holining tenglamasi:



yoki

  (13.2.18)

bo‘ladi.

 (13.2.18) tenglama bilan ifodalanadigan harakatning doiraviy takrorligi p,davri  amplitudasi davriy funksiya sifatida o‘zgaruvchi tebranma harakatdan iborat deyish mumkin.Bu tebranish amplitudasi:



Bu amplitudaning davri



va u T ga nisbatan ancha katta bo‘ladi.

(13.2.18) grafigi 13.8-rasmda ko‘rsatilgan. Majburiy va erkin tebranish doiraviy takrorliklari bir xil bo‘lgan (p=k) hol rezonans holi deb ataladi.

p=k bo‘lganda (13.2.3) differensial tenglama quyidagicha yoziladi:

  (13.2.19)

Rezonans holida (13.2.19) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko‘rinishda aniqlaymiz:

 138-rasm

  (13.2.20)

(13.2.20) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

  (13.2.21)

(13.2.20) va (13.2.21) ni (13.2.19) ga qo‘ysak:

 ) (13.2.22)

hosil bo‘ladi. (13.2.22) dan:



kelib chiqadi.

Demak, (13.2.19) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

  (13.2.23)

(13.2.23) dan ko‘ramizki, nuqtaning harakati erkin va majburiy tebranishlar yig‘indisidan iborat.

Rezonans holdagi majburiy tebranma harakat tenglamasi

  (13.2.24)

bo‘ladi.

 (13.2.24) da  majburiy tebranish amplitudasi,  fazasi,  esa doiraviy takrorligidan iborat. (13.2.24) ga binoan, rezonans holatidagi majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasidan  ga orqada qoladi, amplituda esa vaqtga proporsional o‘zgaradi.





 13.9-rasm 14.0-rasm

(13.2.24) tenglama bilan aniqlanuvchi harakat grafigi 13.9-rasmda tasvirlangan.

**3.Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatiga muhit qarshilik kuchining ta’siri**

M moddiy nuqta qaytaruvchi, uyg‘otuvchi kuchlar hamda muhitning qarshilik kuchi ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsin. Boshlang‘ich paytda M nuqta M0 da bo‘lib, uning absissasi x0 , tezligi V0 bo‘lsin ( 14.0-rasm ).

Moddiy nuqtaning harakati differensial tenglamasini tuzamiz:

  (13.3..1)

Bunda

bo‘lgani uchun (13.3.1) quyidagicha yoziladi:

  (13.3.2)

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:



U holda (13.3.2) tenglama

  (13.3.3)

ko‘rinishni oladi.

(13.3.3) tenglama muhit qarshilik kuchi ta’sir etganda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati differensial tenglamasidan iborat.

(13.3.3) tenglamaning umumiy yechimi (10.4) tenglama umumiy yechimi bilan (13.3.3) tenglama xususiy yechimining yig‘indisidan iborat, ya’ni:



bu yerda x1 b va k larning son qiymatlariga qarab (10.6),(10.15) yoki (10.20) ko‘rinishida bo‘ladi, x2 esa quyidagicha topiladi:

  (13.3.4)

D1 va D2 o‘zgarmaslarni aniqlash uchun (13.3.4) dan vaqt bo‘yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

  (13.3.5)

(13.3.4) va (13.3.5) larni (13.3.3) ga qo‘ysak:

 (13.3.6)

hosil bo‘ladi.

(13.3.6) dan:

  (13.3.7)

kelib chiqadi.

 (13.3.7) tenglamalar sictemasini yechsak:

  (13.3.8)

Natijada (13.3.3) differensial tenglamaning xususiy yechimi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

  (13.3.9)

Muhit qarshiligidagi majburiy tebranishni umumiy holda tekshirish qulay bo‘lishi uchun D1 va D2 o‘zgarmaslar o‘rniga Aq va  o‘zgarmaslarni kiritamiz.Ularni quyidagicha tanlaymiz:

 D1=Aq , D2=Aq (13.3.10)

(13.3.10) ni avval kvadratga oshirib qo‘shsak,so‘ngra (13.3.10) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo‘lsak va (13.3.8) e’tiborga olsak:

 Aq (13.3.11)

  (13.3.12)

kelib chiqadi.

(13.3.10) ni (13.3.4) ga qo‘yamiz.U holda

  Aq (13.3.13)

bo‘ladi.

Shunday qilib (13.3.3) differensial tenglamaning umumiy yechimi

1) b<k holda

 , (13.3.14)

2) b>k holda

 , (13.3.15)

3) b=k holda

  (13.3.16)

tenglamalar bilan ifodalanadi va ulardagi a , ,  va  o‘zgarmaslar harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

 Muhit qarshilik kuchi ta’sir etganda moddiy nuqta tebranma harakatining grafigi b<k hol uchun 14.1-rasmda ko‘rsatilgan;bunda majburiy tebranish grafigi punktir chiziq bilan tasvirlangan.

(13.3.14) , (13.3.15) va (13.3.16) tenglamalardagi ikkinchi had,ya’ni:

 14.1-rasm  (13.3.17)

muhit qarshilik kuchi hisobga olingan holda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatini ifodalaydi.

Majburiy tebranish amplitudasi (13.3.11) tenglikdan aniqlanadi.